南京航空航天大学

2015年硕士研究生入学考试初试试题（ A卷 ）

科目代码： 814

科目名称： 高等代数

满分： 150 分

注意：①认真阅读答题纸上的注意事项；②所有答案必须写在答题纸上，写在本试题纸或草稿纸上均无效；③本试题纸须随答题纸一起装入试题袋中交回！

一、(15分)设 $f(x)=x^4-4x^2+ax+b$，符号“|”表示多项式的整除.

1. 求 a,b 的值，使得 $f(x)=(x^2-2)^2$；

2. 求 a,b 的值，使得 $x^2-x-2\mid f(x)$；

3. 求 a,b 的值，使得 $(x-1)^2\mid f(x)$.

二、(15分)设向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\3\\a\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$, $\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\a+2\\-2\end{pmatrix}$.

1. 求参数 a，使得 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关；

2. 求参数 a，使得 α_3 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 线性表出；

3. 当 $a=0$ 时，将 α_3 用 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 线性表出.

三、(20分)设方程组

$$I:\ \begin{cases}ax_1+x_2+x_3=a^3,\\ x_1+ax_2+x_3=a;\end{cases}\qquad II:\begin{cases}ax_1+x_2+x_3=1,\\ (a+1)x_1+(a+1)x_2+2x_3=a+1,\\ x_1+x_2+ax_3=a^2\end{cases}$$

同解.

1. 求 a 的值；
2. 求方程组的模（长度）最小的特解.

四、(20分)设 n 维向量 $\alpha=(1,1,\cdots,1)^T$，$\beta=(n,0,\cdots,0)^T$，并且矩阵 $A=\alpha\alpha^T$，$B=\alpha\beta^T$，这里“T”表示转置，以下各题相同.

1. 求 A 的特征值和特征向量；
2. 求 B 的特征值和特征向量；
3. 证明 A 与 B 相似.

五、(20分)已知3维实向量空间R^3的线性变换Γ在基$\varepsilon_1=(1,0,0)^T,\varepsilon_2=(0,1,0)^T$,

$\varepsilon_3=(0,0,1)^T$下的矩阵是$A=\begin{pmatrix}3&2&-6\\1&a&-3\\1&b&-2\end{pmatrix}$，且$\xi=(2,1,1)^T$是$\Gamma$的一个特征向量.

1. 求a,b的值;

2. 求A的Jordan标准形(要求为上三角矩阵);

3. 将ξ扩充成R^3的一组基，使得Γ在这组基下的矩阵为Jordan形矩阵.

六、(20分)设3阶实矩阵A的3个列向量是α,β,γ，二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=(\alpha^TX)^2+(\beta^TX)^2+(\gamma^TX)^2,$$

其中$X=(x_1,x_2,x_3)^T$.

1. 求二次型的矩阵;

2. 证明二次型为正定二次型的充分必要条件是α,β,γ线性无关;

3. 若$\gamma=0$，并且α,β是标准正交向量组，求二次型的标准形.

七、(20分)设A是n阶对称矩阵，β是n维非零列向量，分块矩阵$B=\begin{pmatrix}A&\beta\\\beta^T&0\end{pmatrix}$，证明:

1. 若A的秩为n，则B可逆的充分必要条件是$\beta^TA^{-1}\beta\neq0$;

2. 若A的秩为r，则B的秩也为r的充分必要条件是方程组$\begin{cases}AX=\beta\\\beta^TX=0\end{cases}$有解;

3. 若A的秩为$n-1$，则B可逆的充分必要条件是方程组$AX=\beta$无解.

八、(20分)设n阶实矩阵A的n个特征值均为实数，且$AA^T=A^TA$，证明:

1. 若α是A的属于特征值λ的特征向量，则α也是A^T的属于特征值λ的特征向量;

2. 若λ是A的任一特征值，则λ^2也是AA^T的特征值;

3. A的属于不同特征值的特征向量一定正交.