南京航空航天大学

2015 年硕士研究生入学考试初试试题（ A 卷 ）

科目代码： 601

科目名称： 数学分析

满分： 150 分

注意：①认真阅读答题纸上的注意事项；②所有答案必须写在答题纸上，写在本试题纸或草稿纸上均无效；③本试题纸须随答题纸一起装入试题袋中交回！

1．计算下列极限(每题 6 分，共 12 分)．

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^p+2^p+\cdots n^p}{n^{p+1}}\,(p>0)$；（2）$\lim\limits_{x\to\infty}x(\sqrt[3]{x^3+x}-\sqrt[3]{x^3-x})$．

2．计算下列积分(每题 6 分，共 12 分)．

（1）$\int\dfrac{dx}{4+5\cos x}$；（2）$\int_0^1\dfrac{x^2+1}{x^4+1}dx$．

3．已知 $y=\arctan x$, 求 $y^{(n)}(0)$. (提示：可以利用 Leibniz 公式)。(12 分)

4．下面的推理过程是否正确，为什么？（判断 3 分，理由 10 分）

对函数 $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，在 $[0,x]$ 上应用 Lagrange 中值定理得，

$$x^2\sin\frac{1}{x}=(2\xi\sin\frac{1}{\xi}-\cos\frac{1}{\xi})x,\ \xi\in(0,x)$$

即
$$\cos\frac{1}{\xi}=2\xi\sin\frac{1}{\xi}-x\sin\frac{1}{x},\ \xi\in(0,x)$$

因为 $\xi\in(0,x)$，所以当 $x\to 0$ 时有 $\xi\to 0$，于是由上式得

$$\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{\xi}=0\text{，即}\lim_{\xi\to 0}\cos\frac{1}{\xi}=0\ .$$

5．设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且在 $[0,1]$ 上成立 $|f(x)|\le 1, |f''(x)|\le 2$，证明在 $[0,1]$ 上成立 $|f'(x)|\le 3$.（13 分）

6．半径为 r 的球恰好没于水中，球的密度为 ρ，现在要将其吊出水面，最少要做多少功？（设水的密度为 ρ_0，重力加速度为 g）（13 分）

7．证明函数 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2+1}$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内连续，且有连续的导函数．（13 分）

8．设函数 $z=f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数．在极坐标 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ 变换下，

求 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ 关于极坐标的表达式．（12 分）

9．设 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1-e^{x(x^2+y^2)}}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，求 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点的 4 阶泰勒多项式，并求

出 $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$，$\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(0,0)$．（12 分）

10．计算二重积分 $\iint\limits_D(\sqrt{x}+\sqrt{y})dxdy$，其中 D 是由坐标轴及抛物线 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$

所围区域．（13 分）

11．计算曲面积分 $\iint_\Sigma xdydz+ydzdx+zdxdy$，

其中 Σ 为上半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 的上侧．（12 分）

12．设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(x)>0$．研究函数 $I(y)=\int_0^1\frac{yf(x)}{x^2+y^2}dx$ 的连续性．

（13 分）