南京航空航天大学

2014年硕士研究生入学考试初试试题（ A卷 ）

科目代码： 814
科目名称： 高等代数　　　　满分： 150 分

注意：①认真阅读答题纸上的注意事项；②所有答案必须写在答题纸上，写在本试题纸或草稿纸上均无效；③本试题纸须随答题纸一起装入试题袋中交回！

一、(20分)设3阶矩阵A和B满足关系$AB=3A+B$，并且A的特征值均为正数，A的伴随矩阵为$A^*=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-3&0&4\end{pmatrix}$.

1．求A的行列式和全部特征值；

2．求矩阵B和矩阵$(A-E)^{-1}$，其中E表示单位矩阵.

二、(20分)设3阶实对称矩阵A的各行元素之和为零，二次型$f(X)=X^TAX$在正交变换$X=PY$下的标准形是$f=6y_2^2+6y_3^2$(这里“T”表示转置，以下各题相同)，求正交矩阵P和矩阵A.

三、(20分)设V_1是由向量组$\alpha_1=(1,1,a)^T$，$\alpha_2=(1,a,1)^T$，$\alpha_3=(a,1,3+a)^T$生成的子空间，V_2是由向量组$\beta_1=(1,1,a)^T$，$\beta_2=(-2,a,4)^T$，$\beta_3=(-2,a,a)^T$生成的子空间，并且V_1和V_2都是R^3的2维子空间.

1．求参数a；

2．求$V_1\cap V_2$的维数和基；

3．求出R^3中满足条件$\gamma\notin V_1$且$\gamma\notin V_2$的全部向量γ，并说明理由.

四、(20分)设3维线性空间V的线性变换Γ在基ε_1，ε_2，ε_3下的矩阵是

$$A=\begin{pmatrix}-1&-2&6\\-1&0&a\\-1&-1&b\end{pmatrix},$$

且$\alpha=2\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3$是$\Gamma$的一个特征向量.

1．求参数a,b和Γ对应于α的特征值λ;

2．求Γ在基$\eta_1=\varepsilon_1+\varepsilon_2$，$\eta_2=\varepsilon_2+\varepsilon_3$，$\eta_3=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3$下的矩阵$B$;

3．求矩阵A的初等因子和 Jordan 标准形.

五、(15 分) 设$f(x)$和$g(x)$是两个非零多项式, n是自然数, 证明:

1．若$(f(x), g(x))=1$, 则$(f^n(x)+g^n(x), f^n(x)-g^n(x))=1$;

2．若$(f(x), g(x))=d(x)$, 则$(f^n(x)+g^n(x), f^n(x)-g^n(x))=d^n(x)$.

六、(20 分) 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$是一组线性无关的$n$维向量，$\beta_j=\sum_{i=1}^{r}c_{ij}\alpha_i$，$j=1,2,\cdots,s$，记

$$C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1s} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{r1} & c_{r2} & \cdots & c_{rs} \end{pmatrix}$$，证明:

1．$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$线性无关的充分必要条件是$C$的秩为$s$;

2．$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$与$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$等价的充分必要条件是$C$的秩为$r$.

七、(20 分) 设n阶矩阵A, B满足条件$BA=0, A^2=A$，证明:

1．秩$(A)+$秩$(B)\le n$;

2．秩$(A)+$秩$(E-A)=n$;

3．齐次线性方程组$AX=0$与$BX=0$没有非零的公共解的充分必要条件是秩$(A)+$秩$(B)=n$.

八、(15 分) 设A, B是两个n阶正定矩阵，证明:

1．若$AB=BA$, 则AB也是正定矩阵;

2．若$A-B$正定, 则$B^{-1}-A^{-1}$也正定.