南京航空航天大学

2013年硕士研究生入学考试初试试题（ A卷 ）

科目代码: 814
科目名称: 高等代数 满分: 150 分

注意: ①认真阅读答题纸上的注意事项；②所有答案必须写在答题纸上，写在本试题纸或草稿纸上均无效；③本试题纸须随答题纸一起装入试题袋中交回！

一、(15分)设有向量组$\alpha_1=(2,1,1)^T$，$\alpha_2=(1,1,-3)^T$，$\alpha_3=(3-a,a,1)^T$，这里“T”表示转置，以下各题相同.

1．求参数a，使得$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关；

2．在题1的基础上，记$A=\alpha_1\alpha_2^T$，求方程组$AX=\alpha_3$的通解.

二、(25分)设二次型$f(X)=X^TAX$的秩为3，其中$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 2 & b \\ 1 & b & 2 \end{pmatrix}$，$\alpha=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$是$A$的伴随矩阵$A^*$的特征向量.

1．求参数a和b；

2．求正交矩阵P,使得P^TAP为对角矩阵;

3．求二次型$f(X)$在条件$x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$下的最大值.

三、(15分)设V_1是由向量组$\alpha_1=(1,2,-3)^T$，$\alpha_2=(3,0,1)^T$，$\alpha_3=(9,6,-7)^T$生成的子空间，V_2是由向量组$\beta_1=(a,1,0)^T$，$\beta_2=(0,1,-1)^T$，$\beta_3=(b,2,1)^T$生成的子空间.

1．若$\beta_1\in V_1$,求参数a;

2．若V_1与V_2有相同的维数,求参数a,b满足的条件;

3．问:对任意给定的常数a,b，V_1+V_2是否有可能是直和?说明理由.

四、(25分)设R^3的线性变换Γ使得$\Gamma\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2x_1+x_2-2x_3 \\ x_1+2x_2+ax_3 \\ x_1+x_2+bx_3 \end{pmatrix}$,且$\alpha=(1,1,1)^T$是$\Gamma$的一个特征向量.

1．求参数a,b和Γ对应于α的特征值λ;

2．求Γ在基$\varepsilon_1=(1,1,0)^T$，$\varepsilon_2=(0,1,1)^T$，$\varepsilon_3=(1,1,1)^T$下的矩阵A;

3．求题 2 中矩阵A的初等因子和 Jordan 标准形.

五、(15 分) 设$f(x), g(x)$和$h(x)$是三个非零多项式，“|”表示多项式的整除, 证明:

1．若$f(x)g(x) \mid h^2(x)$，$h(x) \mid f(x)$, 则$g(x) \mid h(x)$;

2．若$(f(x), h(x))=(g(x), h(x))=1$, 则$(f(x)g(x), h(x))=1$;

3．若$(f(x), h(x))=1$, 则$(f(x)g(x), h(x))=(g(x), h(x))$.

六、(15 分) 设A, B是n阶方阵, 分块矩阵$C=\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$，证明:

1．$|C|=|A+B||A-B|$;

2．若B可逆, 则$|C|=|B||AB^{-1}A-B|$.

七、(25 分) 设A是秩为r_1的$m\times n$矩阵，B是秩为r_2的$m\times k$矩阵, 分块矩阵$C=\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix}$的秩为$r$，证明:

1．$\max(r_1, r_2) \le r \le r_1+r_2$;

2．矩阵方程$AX=B$有解的充分必要条件是$r=r_1$;

3．齐次线性方程组$A^TY=0$与$C^TY=0$同解的充分必要条件是$AX=B$有解.

八、(15 分) 设$A=(a_{ij})$是n阶实对称矩阵，证明:

1．若$|a_{ii}| > \sum\limits_{j\ne i}|a_{ij}|$, $i=1,2,\cdots,n$, 则$|A|\ne 0$;

2．若$a_{ii} > \sum\limits_{j\ne i}|a_{ij}|$, $i=1,2,\cdots,n$, 则A是正定矩阵.