桂林电子科技大学
2016年硕士研究生统一入学考试试题

科目代码: 811　　　　**科目名称: 数学分析**

请注意：答案必须写在答题纸上（写在试题上无效）。答题纸请注明页码与总页数。

一、计算下列各题（共24分，每小题8分）：

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^2\sin 3x}$；

2. 函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=\cos t-\sin t\\ y=\cos t+\sin t\end{cases}$ 确定，求当 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 时 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ 的值；

3. 求由摆线 $x=a(t-\sin t),y=a(1-\cos t)$ 相应于 $0\le t\le 2\pi$ 的一拱与直线 $y=0$ 所围成的图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积.

二、解答下列各题（共18分，其中第1小题6分，第2小题12分）：

1. 叙述函数 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续的定义；

2. 用一致连续的定义证明：若 f,g 都在区间 I 上一致连续，则 $f+g$ 也在 I 一致连续.

三、（12分）设 $b>a>0,n>1$，证明：$na^{n-1}(b-a)<b^n-a^n<nb^{n-1}(b-a)$.

四、（12分）设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$ 成立 $\int_0^1 f(tx)dt=f(x)$. 证明：$f(x)=C$，$\forall x\in(-\infty,+\infty)$（其中 C 为常数）.

五、（12分）设数项级数 $\sum a_n$ 与 $\sum c_n$ 都收敛，且成立不等式 $a_n\le b_n\le c_n$（$n=1,2,3\cdots$），证明：数项级数 $\sum b_n$ 也收敛.

六、计算下列各题（共26分，其中第1小题12分，第2小题14分）：

1. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^n}{n}$ 的收敛域与和函数；

2. 设 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}ne^{-nx}$，$x>0$，计算 $\int_{\ln 2}^{\ln 3}S(t)dt$.

七、（8分）证明含参量的反常积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin xy}{1+x^2}dx$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛.

八、计算下列各题（共26分，每小题13分）：

1. 求曲线积分 $I=\int_L(e^x\sin y-my)dx+(e^x\cos y-m)dy$，其中 L 为从点 $A(a,0)$ 经半圆周 $x^2+y^2=ax(a>0)$ 到原点的一段弧；

2．求三重积分 $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\,dV$，其中 V 是由曲面 $z=1-(x^2+y^2)$ 与 xOy 面所围成的立体.

九、(12 分)设偏微分方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ 的解 $u=u(x,\mathrm{y})$ 可表示为 $r=\sqrt{x^2+y^2}$ 的函数 $u=f(r)$.

求证：$u=f(r)$ 满足常微分方程 $\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du}{dr}=0$.