

宁波大学 2017 年博士研究生招生考试初试试题 (B 卷)

(答案必须写在考点提供的答题纸上)

科目代码: 2603 科目名称: 随机过程

本试题可能用到的公式:

积化和差:

和差化积

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin \alpha + \beta + \sin \alpha - \beta]$$

$$\sin \theta + \sin \varphi = 2 \sin \frac{\theta + \varphi}{2} \cdot \cos \frac{\theta - \varphi}{2}$$

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\sin \alpha + \beta - \sin \alpha - \beta]$$

$$\sin \theta - \sin \varphi = 2 \cos \frac{\theta + \varphi}{2} \cdot \sin \frac{\theta - \varphi}{2}$$

$$\sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2} [\cos \alpha + \beta - \cos \alpha - \beta]$$

$$\cos \theta + \cos \varphi = 2 \cos \frac{\theta + \varphi}{2} \cdot \cos \frac{\theta - \varphi}{2}$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos \alpha + \beta + \cos \alpha - \beta]$$

$$\cos \theta - \cos \varphi = -2 \sin \frac{\theta + \varphi}{2} \cdot \sin \frac{\theta - \varphi}{2}$$

一、 填空题 (前 8 题 3 分, 第 9 题 6 分, 共 30 分)

1. 设随机变量 X 的均值为 3, 方差为 2。现定义新的随机变量为 $Y = -6X + 22$, $E[XY] =$ _____ ; X 与 Y 相关还是不相关_____。
2. 设随机过程 $X(t) = A \cos t, -\infty < t < \infty$ 其中 A 是随机变量, 具有如下概率分布律, 则 $X(t)$ 的自相关函数为_____。

A	1	2	3
概率	$1/3$	$1/3$	$1/3$

3. 若平稳随机过程 $X(t)$ 的自相关函数为 $R_x(\tau)$, 则其功率谱密度 $S_x(\omega)$ 为_____ ; 平均功率 $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(\omega) d\omega =$ _____。
4. 强度为 λ 的泊松过程的均值和协方差函数分别为_____和_____。
5. 若线性系统的输入为高斯过程, 则输出为_____过程。
6. 白噪声的功率谱密度为_____。若在任意两个不同时刻对白噪声采样, 则两个样本点_____ (不相关, 独立, 正交)。
7. 考虑一个随机过程通过一个线性时不变系统, 已知输入随机过程的自相关函数为 $R_x(\tau)$, 功率谱密度为 $S_x(\omega)$, 线性时不变系统的传递函数为 $H(\omega)$, 则输出随机过程的功率谱密度为 $S_y(\omega) =$ _____。

宁波大学 2017 年博士研究生招生考试初试试题 (B 卷)

(答案必须写在考点提供的答题纸上)

科目代码: 2603 科目名称: 随机过程

8. 马氏链 $\{X_n, n \geq 0\}$, 状态空间 $I = \{0, 1, 2, \dots\}$, 记初始概率 $p_i = P(X_0 = i)$, 绝对概率 $p_j(n) = P(X_n = j)$, n 步转移概率 $p_{ij}^{(n)}$, 则 $p_j(n) =$ _____。

9. 判断以下函数是否满足自相关函数的性质, 若能, 求该随机过程的平均功率; 若不能, 请说明原因。

A. $R(\tau) = \frac{\sin \omega_0 \tau}{\omega_0 \tau}$ B. $R(\tau) = e^{-a|\tau|}, a < 0$

二、讨论及证明题 (共 15 分)

1. 什么叫严平稳随机过程? 什么叫宽平稳随机过程? 如果高斯随机过程是宽平稳的, 那么它是否是严平稳的? 请说明理由。(6 分)

2. 什么叫齐次马尔可夫链? 设 $\{X_n, n \in T\}$ 为马尔可夫链, 则对任意整数 $n \geq 0, 1 \leq l < n$ 和 $i, j \in I$ (I 为状态集), 试证明切普曼-科尔莫戈罗夫 (C-K) 方程 $p_{ij}^{(n)} = \sum_{k \in I} p_{ik}^{(l)} p_{kj}^{(n-l)}$ 成立。(9 分)

三、计算题 (共 55 分)

1. 抛掷一枚硬币的试验, 定义一随机过程: $X(t) = \begin{cases} \cos \pi t & H \\ t & T \end{cases}, t \in (-\infty, +\infty)$, 设

$$p(H) = p(T) = \frac{1}{2},$$

求 (1) $\{X(t), t \in (-\infty, +\infty)\}$ 的样本函数集合; (3 分)

(2) 一维分布函数 $F(x; 0), F(x; 1)$ 。(7 分)

2. 设随机过程 $X(t) = \cos(\omega_0 t + \Phi)$, 式中 ω_0 为常数, Φ 为随机变量,

(1) 试问什么条件下 $X(t)$ 为平稳随机过程? (8 分)

(2) 在平稳随机过程的条件下讨论其各态历经性。(7 分)

3. 某商店顾客的到来服从强度为 4 人每小时的 Poisson 过程, 已知商店 9:00 开门, 试求:

(1) 在开门半小时中, 无顾客到来的概率; (6 分)

宁波大学 2017 年博士研究生招生考试初试试题 (B 卷)

(答案必须写在考点提供的答题纸上)

科目代码: 2603 科目名称: 随机过程

(2) 若已知开门半小时中无顾客到来, 那么在未半小时中, 仍无顾客到来的概率。(9 分)

4. 设齐次马尔可夫链 $X = \{X_n, n = 0, 1, \dots\}$ 的状态空间为 $S = \{0, 1, 2\}$, 一步转移概率矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix},$$

(1) 计算条件概率 $P(X_{n+3} = 0 | X_{n+1} = 1)$; (5 分)

(2) 若 $P(X_0 = 2) = 1/2$, 计算概率 $P(X_2 = 1)$; (4 分)

(3) 若马氏链 X 有初始概率分布 $\left(\frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{4}\right)$, 试计算概率 $P(X_1 = 1, X_2 = 0)$ 。(6 分)