电子科技大学

2016 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目：835 线性代数

注意事项：所有答案必须写在答卷纸上，否则答案无效。

符号说明：$\boldsymbol{I}$ 表示单位矩阵，$\boldsymbol{A}^*$ 表示伴随矩阵，$\mathbf{R}$ 表示实数域.

一(15 分) 已知 3 阶矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1), B=(\alpha_2,\alpha_1,\beta_2)$，其中 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ 都是 3 维列向量. 若 $|A|=4, |B|=5$，求 $|3A-2B|$.

二(20 分) 是否存在满足如下条件的矩阵？如果有，请写出一个或一对这样的矩阵(不必说明理由). 如果没有，请说明理由.

(1) 两个秩为 2 的矩阵 $A_{4\times3}$ 与 $B_{3\times4}$ 使得 $AB=O$.

(2) 3 阶矩阵 C 使得 $C^3\neq O$，但是 $C^4=O$.

(3) 2 阶正交矩阵 F 和 G 使得 $F+G$ 也是正交矩阵.

(4) 2 阶矩阵 U, W 使得 $UW-WU=I$.

三(20 分) 设 2 阶矩阵 A, B 满足 $AB=3A+2B$.

(1) 证明：$AB=BA$.　　(2) 设 $A^*=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$，求 B.

四(20分) 设 $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$，规定2阶实矩阵线性空间 $\mathbf{R}^{2\times2}$ 上的线性变换 σ_A 为:

$$\sigma_A:\mathbf{R}^{2\times2}\to\mathbf{R}^{2\times2}, B\mapsto AB+BA, \forall B\in\mathbf{R}^{2\times2}.$$

(1) 试计算线性变换 σ_A 在 $\mathbf{R}^{2\times2}$ 的标准基 $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ 下的矩阵.

(2) 写出线性变换 σ_A 的像空间 $\mathrm{Im}\,\sigma_A$ 与核空间 $\mathrm{Ker}\,\sigma_A$.

五(15分) 已知非齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=3,\\2x_1+(a+4)x_2-5x_3=6,\\-x_1-2x_2+ax_3=-3\end{cases}$ 有3个线性无关的解，求 a 的值以及原方程组的通解.

六(20 分) 设$\begin{cases} x_n = 4x_{n-1} - 5y_{n-1}, \\ y_n = 2x_{n-1} - 3y_{n-1}, \end{cases}$，且 $x_0 = 2, y_0 = 1$，求 x_{100}.

七(20 分). (1) 设 $\alpha = (1, 3, 4)^T, \beta = (5, 0, -1)^T \in \mathbf{R}^3$，试求一个 3 阶正交矩阵 A 使得 $A\alpha = \beta$ (不用写求解过程).

(2) 设非零向量 $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^n$. 证明: 存在正交矩阵 A 使得 $A\alpha = \beta$ 当且仅当 $\alpha^T\alpha - \beta^T\beta = 0$.

八(20 分). 设 A 是 3 阶实对称矩阵, 各行元素之和均为 0, 且 $R(2I - A) = 2$，$A - 3I$ 不可逆.

(1) $X^T AX = 1$ 表示什么样的二次曲面? 为什么?　　(2) 求伴随矩阵 A^*.