电子科技大学

2015年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目： 692 数学物理基础

注：所有答案必须写在答题纸上，写在试卷或草稿纸上均无效。

一． 选择题（10 小题，每题 3 分，共 30 分, 注:每题只有一个正确答案）

1. 判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n}$的敛散性（　　　）

(A) 发散
(B) 收敛
(C) 条件收敛
(D) 绝对收敛

2. k 为整数，则 $\sqrt[i]{i}=$ (　　　)

(A) $e^{-(\frac{\pi}{2}i+2k\pi)}$

(B) $e^{-(\frac{\pi}{2}+k\pi)}$

(C) $e^{(\frac{\pi}{2}i+k\pi)}$

(D) $e^{(\frac{\pi}{2}+2k\pi)}$

3. 设正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$发散，则(　　　)

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 必收敛

(B) $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 必发散

(C) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 必收敛

(D) $\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2$ 必发散

4. 已知$0<a<1$，那么幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{1+a^n}z^n$的收敛半径为（ ）

(A) $\frac{1}{a}$

(B) a

(C) 1

(D) $2a$

5. 设 A，B 为同阶可逆矩阵，则( )

(A) $AB=BA$

(B) 存在可逆矩阵 C，使得$C^TAC=B$

(C) 存在可逆矩阵 P，使得$P^{-1}AP=B$

(D) 存在可逆矩阵 P 和 Q，使得$PAQ=B$

注：. 质量为m的非相对论性粒子在平面中运动，它的运动由极坐标r，θ以及对时间的导数$\dot{r}$，$\dot{\theta}$共同描述。其势能为$U=kr^2$，其中k为常数。请解答 6,7 题

6. 下列选项中为描述此粒子拉格朗日量的是？( )

(A) $L=\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right)-kr^2$

(B) $L=\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+\theta^2\right)+kr^2$

(C) $L=\frac{1}{2}m\left(\theta^2\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right)-kr^2$

(D) $L=\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r\dot{r}\dot{\theta}+r^2\dot{\theta}^2\right)-kr^2$

7. 下列的选项中哪一项一直为常数？( )

(A) $m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right)$

(B) $mr^2\dot{\theta}^2$

(C) $mr\dot{\theta}$

(D) $mr^2\dot{\theta}$

注：自由空间中火箭的运动方程可写为

$$m\frac{dv}{dt}+u\frac{dm}{dt}=0$$

其中 m 为火箭的质量，v 为其速度，t 为时间，u 是一个常数。请解答 8,9 题

8　其中常数 u 代表了(　　　　)

(A) 火箭在 $t=0$ 时的速度

(B) 火箭在其静止参考系中的瞬时速度

(C) 火箭排出燃料相对于火箭的速度

(D) 火箭排出燃料在静止参考系的速度

9. 当速度 v 为 m 的函数时，此运动方程可以求解。假设火箭在出发时 $v=0$，$m=m_0$，则方程的解 v 为(　　　　)

(A) $u\exp(m_0/m)$

(B) $u\sin(m_0/m)$

(C) $u\ln\frac{m_0}{m(t)}$

(D) 以上答案都不是正确的解

10. 设 $z \in C$ 且 $|z| \le 1$，a 为复数，则函数 $f(z)=|z^n+a|$ 的最大值为(　　　　)

(A) $1+|a|$

(B) 1

(C) 2

(D) $|1+a|$

二．填空题（10 个空，每空 3 分，共 30 分）

11. 计算积分 $\int_C z dz=$ (　　　　),其中 C 为从原点到点 $3+4i$ 的直线段。

12. 计算积分 $\oint_{|z|=2}\frac{1}{z^2+1}dz=$ (　　　　)，（注：其中积分路径是绕原点为圆心，2 为半径的圆，积分方向为逆时针正方向）。

13. 在下列场中运动时动量 P 和角动量 M 的哪些分量守恒?

(a) 无限大均匀平面场(无限大平面为 xy 平面) (　　　　)

(b) 无限长均匀圆柱场(圆柱轴为 z 轴) (　　　　)

(c) 无限长均匀棱柱场(棱边平行于 z 轴) (　　　　)

(d) 两个点场(两个点位于 z 轴上) （　　　　　　）

(e) 无限大均匀半平面场(无限大半平面是 xy 平面上以 y 轴为界的) (　　　　)

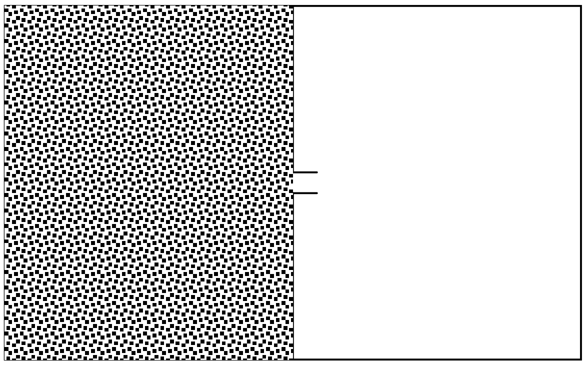
(f) 均匀圆锥场(圆锥轴为 z 轴) (　　　　)

(g) 均匀圆环场(圆环轴为 z 轴) (　　　　)

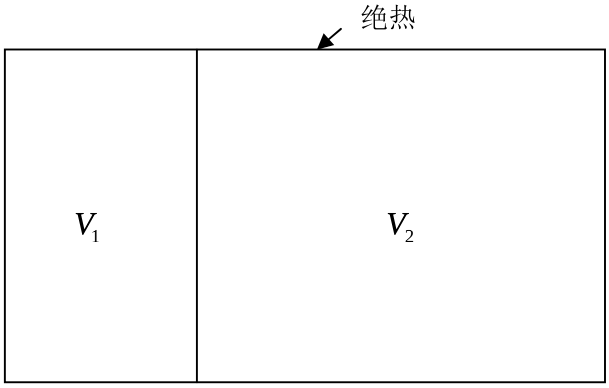
(h) 无限长均匀圆柱形螺旋场(绕螺旋轴 z 轴旋转, h 为螺距) (　　　　)

三．简答题（2 小题，每小题 15 分，共 30 分）

14. 有一个孤立的容器，被分成左右两半。起初左半部装有温度为 T_0 的理想气体，右半部是空的。如果在隔板上开一个小孔，求达到平衡时的温度。并说明原因。



15. 一理想气体起初被限制在体积为 V_1+V_2 的绝热容器 V_1 部分，容器的剩余部分是空的。当隔板抽调后，气体膨胀而充满真个容器。如果气体的初始温度为 T，求它的最终温度。并说明原因。



四．计算题（4 小题，每小题 15 分，共 60 分）

16. 利用复数方法进行证明：

$$\cos\theta+\cos2\theta+\cos3\theta+\ldots+\cos n\theta=\frac{\sin(n+\frac{1}{2})\theta-\sin\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}}$$ 。

17. 将函数 $f(z)=\dfrac{z}{z+1}$，在 $|z-1|<2$ 内展开成幂级数,其中 z 为复数。

18. 黑体辐射。(a) 推导麦克斯韦关系 $\left(\dfrac{\partial S}{\partial V}\right)_T=\left(\dfrac{\partial p}{\partial T}\right)_V$，

(b) 麦克斯韦从他的电磁场理论发现，各向同性的辐射场的压强 p 等于能量密度 $u(T)$ 的 $\dfrac{1}{3}$，即：

$$p=\frac{1}{3}u(T)=\frac{1}{3}\frac{U(T)}{V}$$ （V 为空腔体积），

用热力学第一定律及第二定律及(a)中结果证明：

$$u=\frac{1}{3}T\frac{du}{dT}-\frac{1}{3}u$$

(c) 解此方程得到 u 对 T 的斯特番(Stefan)定律。

19. 考虑下面的厄米矩阵

$$T=\begin{pmatrix}2 & i & 1\\ -i & 2 & i\\ 1 & -i & 2\end{pmatrix}$$

(a) 计算 $\det(T), Tr(T)$。

(b) 根据 $\det(T)=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n, Tr(T)=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n$，求 T 的本征值；验证它们的和与积同(a)中结果相同。写出 T 的对角形式。

(c) 求 T 的本征矢，并在简并区，构造两个线性无关的本征矢。使它们正交，并验证它们都和第三个本征矢正交。（三个本征矢都需要归一化）