电子科技大学

2015年硕士学位研究生入学考试试题

考试科目：688 高等数学

注：所有答案必须写在答题纸上，做在试卷或草稿纸上无效。

一、选择题（每小题4分，共32分，只有一项符合题目要求）

1. 设 $f(x)=2^x+3^x-2$，当 $x\to 0$ 时……………………………………………………（　　）.

　(A)　$f(x)$ 与 x 是等价无穷小；　　(B)　$f(x)$ 与 x 是同阶但非等价无穷小；

　(C)　$f(x)$ 是比 x 高阶的无穷小；　　(D)　$f(x)$ 是比 x 低阶的无穷小.

2. 设当 $a<x<b$ 时，$f(x),g(x)$ 可导并恒大于零，且 $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)>0$，则当 $a<x<b$ 时，有　……………………………………………………………（　　）.

　(A) $f(x)g(a)>f(a)g(x)$；　　(B) $f(x)g(b)>f(b)g(x)$；

　(C) $f(x)g(x)>f(b)g(b)$；　　(D) $f(x)g(x)>f(a)g(a)$.

3. 设 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$\varphi(x)>0$，则函数 $y=\Phi(x)=\int_a^b|x-t|\varphi(t)\mathrm{d}t$ 的图形…（　　）.

　(A)　在 (a,b) 内为凸(上凸)；　　(B)　在 (a,b) 内为凹(下凸)；

　(C)　在 (a,b) 内有拐点；　　(D)　在 (a,b) 内有间断点.

4. 若 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的两个偏导数存在，则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ ……………………（　　）.

　(A)　连续且可微；　　(B)　连续但不一定可微；

　(C)　可微但不一定连续；　　(D) 不一定可微也不一定连续

5. 设　$u=f(r)$，$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，$f(r)$ 具有二阶连续导数，则 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\cdots$（　　）.

(A) $f''(r)+\frac{1}{r}f'(r)$；　(B) $f''(r)+\frac{2}{r}f'(r)$；　(C) $\frac{1}{r^2}f''(r)+\frac{1}{r}f'(r)$；　(D) $\frac{1}{r^2}f''(r)+\frac{2}{r}f'(r)$.

6. $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r=$　……………………………………………………（　　）.

　(A) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$；　　(B) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$；

　(C) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$；　　(D) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$.

7. 设曲线 L 是区域 D 的正向边界，则 D 的面积为　……………………………（　　）.

　(A) $\frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x$；　(B) $\frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x$；　(C) $\oint_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x$；　(D) $\oint_L x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x$.

8. 若幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-3)^n$ 在 $x=6$ 处发散，则该级数在 $x=2$ 处　…………（　　）.

　(A) 条件收敛；　(B) 绝对收敛；　(C) 发散；　(D) 敛散性不能判定.

二、填空题（每小题 4 分，共 24 分）

1. 当 $x\to 0$, $\sqrt{1-2x}=1+ax+bx^2+o(x^2)$ 则 $a=$________ , $b=$________.

2. 设 $f(x)=(x-1)(x-2)\cdots(x-100)$，则 $f'(100)=$____________.

3. $\int_0^{\pi} x\sqrt{\sin^2 x-\sin^4 x}\,\mathrm{d}x=$____________.

4. 函数 $u=xy^2z^3$ 在点 (1, 1, 1) 处方向导数的最大值是____________.

5. 设 $\Omega=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+(z-1)^2\le 1\}$,则 $\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$____________.

6. 函数 $f(x)=\begin{cases} x^2, & 0\le x<1, \\ 0, & 1\le x<2 \end{cases}$ 在 $[0,2]$ 上展开成正弦级数的和函数 $S(x)=$___________.

三、（11 分）设函数 $f(x)=\begin{cases} x^2+ax+b, & x\le 0, \\ x^2\ln x, & x>0, \end{cases}$ 在点 $x=0$ 可微，

(1) 求常数 a,b 的值； (2) 求函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的值域 $[c,d]$.

四、（10 分）设 $f(\sin^2 x)=\dfrac{x}{\sin x}$，求 $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}f(x)\mathrm{d}x.$

五、（11 分）设 f 二阶可导，$f(0)=1$，满足 $f'(x)+3f(x)+2x\int_0^1 f(tx)\mathrm{d}t=-e^{-2x}$，求 $f(x)$.

六、（10 分）求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6 \\ x+y+z=0 \end{cases}$，在点 $(1,-2,1)$ 处的切线和法平面方程.

七、（11 分）过椭圆 $3x^2+2xy+3y^2=1$ 上任一点(第一象限)作椭圆的切线, 求这些切线与两坐标轴所围成的三角形的面积的最小值.

八、（10 分）计算曲线积分 $I=\oint_L (x+y^3z)\,\mathrm{d}x+(x-y)\,\mathrm{d}y+(x+y+z)\,\mathrm{d}z$，其中曲线 L 为曲面 $x^2+y^2=1$ 与曲面 $x^2+y^2=-z$ 的交线, 从原点看去是逆时针方向.

九、（10 分）设函数 $f(x)$ 具有连续导数, S 为曲面 $z=x^2+y^2+1\ (1\le z\le 3)$,取上侧, 计算曲面积分 $\displaystyle\iint\limits_{S}[\frac{z}{y}f(\frac{x}{y})+xy^2]\mathrm{d}y\mathrm{d}z+[\frac{z}{x}f(\frac{x}{y})+x^2y+e^x]\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

十、（10 分）设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导, $f(0)=0$，在 $(0,1)$ 内有最大值 2，并取得最小值,
证明: (1) 至少存在一个点 $\eta\in(0,1)$, 使得 $f'(\eta)>2$；
(2) 至少存在一个点 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f'(\xi)<-4$.

十一、（11 分）设 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续,对任意实数 x,有 $g(x+1)=g(x)$,且 $\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x=0$；又函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续的导数, 记 $a_n=\int_0^1 f(x)g(nx)\mathrm{d}x$， 证明：级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛.