2015 年电子科技大学硕士研究生入学考试试题

考试科目：602 高等数学

注：所有答案必须写在答题纸上，写在试卷或草稿纸上均无效。

一、填空题（本题满分 28 分，每小题 4 分）

1. $\lim\limits_{x\to 2\pi}\dfrac{\sqrt[n]{1+(x-2\pi)^2}-1}{1-\cos x}=$ ______.

2. 设 $x>0$ 时，可导函数 $f(x)$ 满足 $f(x)+2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{3}{x}$，则 $f'(x)=$ ______.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+1^2}+\dfrac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n^2}\right)=$ ______.

4. 当 $\Delta x\to 0$ 时，α 是比 Δx 高阶的无穷小量，函数 $y(x)$ 在任意点 x 处的增量 $\Delta y=\dfrac{y\Delta x}{1+x^2}+\alpha$ 且 $y(0)=\pi$，则 $y(1)=$ ______.

5. 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{n\cdot 3^n+(-2)^n}$ 的收敛区间为 ______.

6. 二阶常系数线性非齐次微分方程 $y''+y=x\cos x$ 的特解形式为 ______.

7. 设 $f(x)$ 是连续函数，$F(t)=\int_1^t \mathrm{d}y\int_y^x f(x)\,\mathrm{d}x$，则 $F'(2)=$ ______.

二、（本题满分 10 分） 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(1-\cos x)}{(\sqrt{1+x^2}-1)\arctan x^2}$.

三、（本题满分 10 分） 求微分方程 $xy'+(1-x)y=e^{2x}\quad(0<x<+\infty)$ 满足 $\lim\limits_{x\to 0^+}y(x)=1$ 的特解.

四、（本题满分 10 分） 若点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 是光滑曲面 $F(x,y,z)=0$ 上与原点距离最近的点，试证过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 的法线必通过坐标原点.

五、（本题满分 10 分） 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$ 的收敛区间并求和函数.

六、（本题满分 10 分） 设 $z=f\left(2x+3y,\dfrac{x}{y}\right)$，$f$ 均具有二阶连续偏导数,求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$；

七、（本题满分 10 分） 计算二重积分 $\iint_D(\sqrt{x^2+y^2}+y)\,d\sigma$,其中 D 是由圆 $x^2+y^2=4$ 和 $(x+1)^2+y^2=1$ 所围成的平面区域.

八、（本题满分 10 分）

计算三重积分 $I=\iiint_V(x+y+z)dV$，其中 $V=\left\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\le 2z\right\}$.

九、（本题满分 10 分） 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有连续的一阶导数，求

$$\int_L\frac{1+y^2f(xy)}{y}dx+\frac{x}{y^2}\left[y^2f(xy)-1\right]dy,$$ 其中 L 是从 $A\left(3,\dfrac{2}{3}\right)$ 到 $B(1,2)$ 的直线段.

十、（本题满分 10 分） 计算 $I=\iint_S xz\,dydz+2zy\,dzdx+3xy\,dxdy$, 其中 S 是曲面

$z=1-x^2-\dfrac{y^2}{4}\ (0\le z\le 1)$ 的上侧.

十一、（本题满分 10 分） 设 $f(t)$ 是周期为 2π，高为 h 的锯齿波形， 它在 $[0,2\pi]$ 上的表达式为 $f(t)=\dfrac{h}{2\pi}t$，将此锯齿波展开成傅立叶级数.

十二、（本题满分 11 分） 已知三角形的三边长分别为 a,b,c，其面积为 S_0，

试求该三角形内一点到三边距离之乘积的最大值.

十三、（本题满分 11 分） 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，$a\ge 0$,

证明：存在 $\xi_1,\xi_2,\xi_3\in(a,b)$ 使

$$f'(\xi_1)=(b+a)\frac{f'(\xi_2)}{2\xi_2}=\left(b^2+ab+a^2\right)\frac{f'(\xi_3)}{3\xi_3}.$$