

电子科技大学

2014 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目：835 线性代数

注：所有答案必须写在答题纸上，写在试卷或草稿纸上均无效。

1. (15 分) 计算 5 阶行列式 $D_5 = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$.

2. (15 分) 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ a & b & -3 \\ 4 & -2 & c \end{pmatrix}$, 如果 3 阶矩阵 B 的伴随矩阵 $B^* \neq O$ 且 $AB = O$, 求 A .

3. (15 分) 已知 4 阶方阵 $A = (a_1, a_2, a_3, a_4)$, 线性方程组 $AX = b$ 的通解为 $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$,

其中 k 为任意常数. 试问: a_4 能否由 a_1, a_2, a_3 线性表出? 为什么?

4. (15 分) 设 A 是 3 阶方阵, 3 维列向量组 a, Aa, A^2a 线性无关, 且 $A^3a = 3Aa - 2A^2a$.

证明矩阵 $B = (a, Aa, A^2a)$ 可逆.

5. (20 分) 设 $\mathbf{R}^{3 \times 3}$ 是实数域上所有 n 阶方阵关于方阵的加法和数乘所成线性空间,

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_1 \end{pmatrix} \mid a_1, a_2, a_3 \in \mathbf{R} \right\}, \quad W = \{A \in \mathbf{R}^{3 \times 3} \mid A^T = -A\}.$$

(1) 分别写出 V 和 W 的维数和一组基(不用写求解过程);

(2) 求 $V \cap W$ 的一组基.

6. (20 分) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -a \\ 2 & a & -2 \\ -a & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(1) 求 A 的特征值与特征向量; (2) 讨论 A 何时可以相似对角化.

7. (15 分) 设 V 是数域 F 上的 n 维线性空间, A 是 V 上的线性变换, 证明: A 在 V 的两组不同基下的矩阵是相似的.

8. (15 分) 设 $V = \text{span}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ 是欧氏空间 \mathbf{R}^4 (关于标准内积) 的子空间, 其中

$$\mathbf{a} = (1, 2, 1, 1), \mathbf{b} = (-2, 0, 0, 1).$$

(1) 求正交补 V^\perp 的一组标准正交基; (2) 证明: 不存在正交变换 \mathbf{A} 使得 $\mathbf{A}\mathbf{a} = \mathbf{b}$.

9. (20 分) 设 3 元实二次型 $f(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{X}$ 的秩为 2, 且满足条件 $\mathbf{A}^2 + 2\mathbf{A} = \mathbf{O}$.

(1) $f(\mathbf{X}) + 1 = 0$ 表示什么二次曲面? 为什么?

(2) 当 k 满足什么条件时, 二次型 $f(\mathbf{X}) + k(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$ 正定?