电子科技大学
2014 年攻读硕士学位研究生入学考试试题
考试科目：688 单独考试高等数学

注：所有答案必须写在答题纸上，写在试卷或草稿纸上无效。

一、选择题（每小题 4 分，共 32 分，只有一项符合题目要求）

1. 设 $f(x)=\dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}$，则 ·· （　）.

　(A)　$x=0$ 为无穷间断点，　$x=1$ 为跳跃间断点；
　(B)　$x=0$ 为无穷间断点，$x=1$ 为可去间断点；
　(C)　$x=0$ 为可去间断点，$x=1$ 为无穷间断点；
　(D)　$x=0$ 为可去间断点，$x=1$ 为跳跃间断点.

2. 设 $f(x)=\begin{cases} x, & x<0 \\ \ln(1+x), & x\ge 0 \end{cases}$，则　$f''(0)$ 是 ···（　）.

　(A) 0;　　(B) $\dfrac{1}{2}$;　　(C) 1;　　(D) 不存在.

3. 设 $f'(x)$ 在 $x=0$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{x}=-1$，则 ··（　）.

　(A)　$f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值；　　　　　(B)　$f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值；
　(C)　$(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点；　　(D).以上都不是.

4. 设 $g(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, 其中 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}(x^2+1), & 0\le x<1, \\ \dfrac{1}{3}(x-1), & 1\le x\le 2, \end{cases}$，则 $g(x)$ 在区间 $(0,2)$ 内 ···（　）.

　(A) 无界；　　(B) 单调；　　(C) 连续；　　(D)　不连续.

5. 设函数 $z=f(x,y)$ 满足 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2$，且 $f(x,0)=1$, $\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,0)}=x$，则 $f(x,y)=$ ·········（　）.

　(A)　$1-xy+y^2$；　(B) $1+xy+y^2$；　(C)　$1-x^2y+y^2$；　(D)　$1+x^2y+y^2$.

6. 设 $f(x,y)$ 是连续函数，则　$I=\int_0^1 \mathrm{d}y\int_{-y}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,\mathrm{d}x=$　··································（　）.

　(A)　$\int_0^{\frac{p}{4}}\mathrm{d}q\int_0^{\frac{\sin q}{\cos^2 q}} f(r\cos q, r\sin q)r\,\mathrm{d}r$；

　(B)　$\int_{\frac{p}{4}}^{\frac{3p}{4}}\mathrm{d}q\int_0^{\frac{1}{\sin q}} f(r\cos q, r\sin q)r\,\mathrm{d}r$；

　(C)　$\int_0^{\frac{p}{4}}\mathrm{d}q\int_0^{\frac{\sin q}{\cos^2 q}} f(r\cos q, r\sin q)r\,\mathrm{d}r+\int_{\frac{p}{4}}^{\frac{3p}{4}}\mathrm{d}q\int_0^{\frac{1}{\sin q}} f(r\cos q, r\sin q)r\,\mathrm{d}r$；

(D) $\int_0^{\frac{p}{4}}\mathrm{d}q\int_0^{\frac{1}{\cos^2 q}} f(r\cos q, r\sin q)r\,\mathrm{d}r+\int_{\frac{p}{4}}^{\frac{3p}{4}}\mathrm{d}q\int_0^{\frac{1}{\sin q}} f(r\cos q, r\sin q)r\,\mathrm{d}r$

7. 已知 $\dfrac{(x+ay)\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{(x+y)^2}$ 为某函数的全微分，则 $a=$ ……………………………( ).

(A) -1； (B) 0； (C) 1； (D) 2.

8. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n+3^n}x^{2n}$ 的收敛半径 $R=$ ……………………………………………（ ）.

(A) 2； (B) 3； (C) $\sqrt{2}$； (D) $\sqrt{3}$.

二、填空题（每小题 4 分，共 24 分）

1. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且 $\int_0^x f(x-t)e^t\,\mathrm{d}t=\cos x\ \ (x\in R)$，则 $f(x)=$____________.

2. 由参数方程 $\begin{cases} x=\dfrac{t^2}{2} \\ y=1-t \end{cases}$ 所确定的函数的二阶导数 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=$____________.

3. 设 $f'(\ln x)=1+x$，则 $\int_0^{\frac{1}{2}} f'(2x)\,\mathrm{d}x=$____________.

4. 设 $z=f(x,xy)$，f 具有一阶连续偏导数，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$____________.

5. 旋转抛物面 $z=2-x^2-y^2$ 被圆柱面 $x^2+y^2=1$ 所截部分曲面面积等于____________.

6. 以 $y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}+\sin x$ (C_1,C_2 为任意常数)为通解的二阶常系数线性非齐次微分方程为____________________.

三、（10 分）确定常数 a,b,c 的值，使 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax-\sin x}{\int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t}=c\ (c\neq 0)$.

四、（11 分）讨论 k 的不同取值情况，确定方程 $x^3-3x^2-9x+k=0$ 实根的个数.

五、（11 分）设 $f(x)=\lim\limits_{t\to\infty}\left(\dfrac{t+x}{t+2x}\right)^t\ (x\geq 0)$,

(1) 求曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴，y 轴，直线 $x=1$ 围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所成的旋转体体积；

(2) 在曲线 $y=f(x)$ 上求一点，使过该点的切线与两坐标轴所围平面图形面积最大，并求该面积.

六、（10 分）已知函数 $z=f(x,y)$ 由方程 $x^2(y+z)-4\sqrt{x^2+y^2+z^2}=0$ 确定，求 $z=f(x,y)$ 在点 $P(-2,2,1)$ 处的全微分 $\mathrm{d}z\big|_P$.

七、（12 分）求椭球面 $x^2+2y^2+2z^2=1$ 的切平面方程，使该切平面通过直线 $l:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{-1}$.

八、（10 分）计算曲线积分 $I=\int_L \dfrac{x\,\mathrm{d}\,y-y\,\mathrm{d}\,x}{9x^2+y^2}$，其中曲线 L 为以下两种情况：

(1) L 为曲线 $(x-1)^2+(y-1)^2=a^2$ $(a\neq\sqrt{2})$,取逆时针方向；

(2) L 是沿曲线 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ $(y\geq 1)$ 从点 $A(0,1)$ 到点 $B(2,1)$.

九、（10 分）计算曲面积分 $\iint\limits_S (x^2+y^2)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^2+z^2)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^2+x^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 S 为曲面 $z=x^2+y^2$ $(1\leq z\leq 2)$，其法向量与 Oz 轴的夹角为锐角.

十、（10 分）设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有三阶连续导数,证明：至少存在一个点 $h\in(-1,1)$, 使得

$$f(1)-f(-1)-2f'(0)=\frac{1}{3}f'''(h).$$

十一、（10 分）设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，且和为 S，证明：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_1+2a_2+\mathbf{L}+na_n}{n(n+1)}=S.$$

.