电子科技大学

2014年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目：601 数学分析

注： 所有答案必须写在答题纸上，写在试卷或草稿纸上均无效。

一、 填空题(每小题 5 分，共 40 分)

1. 设 $x_n=\frac{\sqrt{7}n}{2n^2+1}+\frac{\sqrt{7}n}{2n^2+2}+\cdots+\frac{\sqrt{7}n}{2n^2+n}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=$________________________.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x-\sin^2 x}{x}\right)^{\frac{2}{x}}=$____.

3. 如果 $f(x)=\begin{cases}ax^2-b, & x\ge 1,\\ e^{x-1}, & x<1,\end{cases}$ 在 $x=1$ 处可导，则 $a=$__________，$b=$__________.

4. 已知 $y=x^2\ln x,\ (x>0)$， $n>2$ 为正整数，则
   $d^n y=$____.

5. $\frac{d}{dx}\int_0^{x^2}t^2e^{\sin t}dt=$____.

6. 设曲面方程为 $x^2+y^3+z^2=10$，则该曲面在点 $(1,2,-1)$ 的切平面方程为__________________________，而法线方程为______________________________.

7. 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n+2}(x-1)^n$ 的收敛半径为____________，收敛域为________________.

8. 设有向曲线 L 的方程为 $x^2+y^2=2x+1$，方向为顺时针方向，则曲线积分
   $\oint(e^y\cos x+x^2+3y)dx+(e^y\sin x+y^2+6x)dy=$_________________________.

二、（12 分）设函数 $f(x)=x^2+2x+1$，证明：$f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上非一致连续，但对于任意实常数 $a>0$， $f(x)$ 在区间 $[0,a]$ 上一致连续.

三、（12 分）设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$．证明：存在一点 $x\in(0,1)$，使得 $2f(x)+xf'(x)=0$．

四、（12 分）求函数 $y=x^4(12\ln x-7)$ 的凸性区间及拐点.

五、（12 分）设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导， $f(0)=0$，且其反函数为 $g(x)$．若 $\int_0^{f(x)}g(t)\mathrm{d}t=x^2e^x$，求 $f(x)$．

六、（12 分）设常数 $a>0$，证明：函数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}3^n\sin\frac{1}{8^n x}$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上一致收敛.

七、（14 分）求椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 在第一卦限部分上的切平面与三个坐标面所围成

的四面体的最小体积.

八、（12 **分**）设函数 $P(x,y,z)$ ，$Q(x,y,z)$ ，$R(x,y,z)$ 在 R^3 上具有连续偏导数．且对任意光滑曲面 $\sum$ ，成立

$$\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = 0 .$$

证明：在 R^3 上，$\dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z} \equiv 0$.

九、（12 **分**）求由平面 $y = 0$ ，$y = kx\ (k > 0)$ ，$z = 0$ 以及球心在原点、半径为 R 的上半球面所围的第一卦限的立体体积.

十、（12 **分**）设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上二阶可导，且有 $f(0) = f(1) = 0$ ，$\min\limits_{0\le x\le 1} f(x) = -1$.
证明：存在 $h \in (0,1)$ ，使得 $f''(h) \ge 8$.