南京航空航天大学

2016 年硕士研究生招生考试初试试题（ A 卷 ）

科目代码： 814
科目名称： 高等代数
满分： 150 分

注意：①认真阅读答题纸上的注意事项；②所有答案必须写在答题纸上，写在本试题纸或草稿纸上均无效；③本试题纸须随答题纸一起装入试题袋中交回！

一、(15 分) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & a \end{pmatrix}$， E 是四阶单位矩阵.

1. 计算多项式 $f(x)=|xE-A|$；

2. 若 x^2-x-2 能够整除 $f(x)$，求 a,b 的值；

3. 若 $-1, 2$ 是 A 的两个特征值，求 A 的其余特征值.

二、(15 分) 设有向量组

$$\text{I}:\ \alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\a\end{pmatrix},\ \alpha_2=\begin{pmatrix}-2\\a\\4\end{pmatrix},\ \alpha_3=\begin{pmatrix}-2\\a\\a\end{pmatrix};\quad \text{II}:\ \beta_1=\begin{pmatrix}1\\1\\a\end{pmatrix},\ \beta_2=\begin{pmatrix}1\\a\\1\end{pmatrix},\ \beta_3=\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}.$$

1. 求 a 的值，使得向量组 I 线性相关；
2. 求 a 的值，使得向量组 I 不能由向量组 II 线性表出；
3. 在题 1 和题 2 同时成立的情况下，将向量 $\gamma=(1,-2,-5)^T$ 用 $\beta_1, \beta_2, \alpha_3$ 线性表出，这里“T”表示转置，以下各题相同.

三、(20 分) 已知非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=-1, \\ 4x_1+3x_2+5x_3-x_4=-1, \\ ax_1+x_2+3x_3+bx_4=1 \end{cases}$$

有三个线性无关的解.
1. 证明方程组系数矩阵 A 的秩为 2；

2. 求 a,b 的值；

3. 求方程组在超平面 $x_3-x_4=0$ 上的模（长度）最小的特解.

四、(20 分) 设 n 阶矩阵 A, B 满足方程 $AB = 6A + B - 3E$，这里 E 表示 n 阶单位矩阵.

1. 证明：若 λ 是 B 的任一特征值，则 $\lambda \neq 6$；
2. 证明：$AB = BA$；
3. 若 A 的伴随矩阵为 $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$，求 B.

五、(20 分) 设 3 维实向量空间 R^3 的线性变换 Γ 使得 $\Gamma\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ -2x_1 + x_2 + ax_3 \\ x_1 \end{pmatrix}$.

1. 求 Γ 在基 $\varepsilon_1 = (1, 0, 0)^T, \varepsilon_2 = (1, 1, 0)^T, \varepsilon_3 = (1, 1, 1)^T$ 下的矩阵 A；
2. 若 Γ 有三个线性无关的特征向量，求 a 的值；
3. 若 $\alpha = (2, 3, -2)^T$ 是 Γ 的一个特征向量，证明 A 不能与对角矩阵相似，并求 A 的 Jordan 标准形.

六、(20 分) 设 A 是 3 阶实对称矩阵，三元二次方程

$$(x, y, z)\, A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{3}}(x + y + z) = 0$$

经正交变换 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ 化为 $6v^2 + 6w^2 - u = 0$.

1. 求矩阵 A 的全部特征值；
2. 求正交矩阵 P 的第一列；
3. 求矩阵 A.

七、(20 分) 设 A 是 n 阶实反对称矩阵，证明：

1. 若 A 不可逆，则 A 的实特征值只能是 0；
2. A^2 的特征值均小于或等于 0；
3. 若 $i\lambda$ 是 A 的一个纯虚数特征值，$x + iy$ 是对应的特征向量（这里 $x, y \in R^n, i = \sqrt{-1}$），则 x 与 y 正交.

八、(20 分) 设 A, B 是两个 n 阶正定矩阵，实可逆矩阵 P 使得

$$P^T AP = E, \quad P^T BP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

这里 E 表示 n 阶单位矩阵，证明:

1. $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是矩阵 BA^{-1} 的全部特征值;

2. $A-B$ 为正定矩阵的充分必要条件是对 BA^{-1} 的每一个特征值 λ，有 $|\lambda|<1$;

3. 若 A^2-B^2 是正定矩阵，则 $A-B$ 也是正定矩阵.