

南京航空航天大学

2017 年硕士研究生入学考试初试试题 (A 卷)

科目代码: 814

科目名称: 高等代数

满分: 150 分

注意: ①认真阅读答题纸上的注意事项; ②所有答案必须写在答题纸上, 写在本试题纸或草稿纸上均无效; ③本试题纸须随答题纸一起装入试题袋中交回!

一、(15 分) 设 4 阶矩阵 A 的特征多项式是 $f(x) = x^4 - 5x^3 + 5x^2 + ax + b$, 且 $x^2 - 1 \mid f(x)$, 这里 “ \mid ” 表示多项式的整除.

1. 求 a, b 的值;
2. 求 A 的全部特征值;
3. 问: $x^2 - 1$ 是否有可能成为矩阵 A 的最小多项式? 并说明理由.

二、(15 分) 设 V_1 是由向量组 $\alpha_1 = (1, 0, 2)^T$, $\alpha_2 = (2, 1, 1)^T$, $\alpha_3 = (3, a, 3)^T$ 生成的 R^3 的一个 2 维子空间 (这里 “ T ” 表示转置, 以下各题相同).

1. 求 a 的值;
2. 求 V_1 的正交补 V_1^\perp 的维数和基;
3. 若 V_2 是由向量组 $\beta_1 = (1, 1, 0)^T$, $\beta_2 = (2, 1, 3)^T$ 生成的 R^3 的另一个子空间, 求 $V_1 \cap V_2$ 的维数和基.

三、(20 分) 设有非齐次线性方程组

$$(I) \begin{cases} x_1 - x_3 = a, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 2; \end{cases} \quad (II) \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 + bx_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

1. 证明对任意实数 a , 方程组 (I) 有无穷多解;
2. 求 a, b 的值, 使得方程组 (I) 和 (II) 同解;
3. 在方程组 (I) 和 (II) 同解的情况下, 求方程组在实数域上模最小的特解.

四、(20 分) 设 3 阶矩阵 A 与 3 维列向量 α , 使得向量组 $\alpha, A\alpha, A^2\alpha$ 线性无关, 且满足 $A^3\alpha = 2A^2\alpha - A\alpha$, 矩阵 $P = (\alpha, A\alpha, A^2\alpha)$.

1. 求矩阵 B , 使得 $A = PBP^{-1}$;
2. 求行列式 $|E + A|$, 这里 E 表示单位矩阵;
3. 问: 矩阵 A 是否可以 diagonalize? 如能, 求与其相似的对角标准形; 如不能, 求与其相似的 Jordan 标准形.

五、(20分) 设有二次型 $f(X) = X^T A X = 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + t x_1 x_2 + t x_1 x_3 + t x_2 x_3)$.

1. 写出 $f(X)$ 在正交变换 $X = PY$ 下的一个标准形;
2. 若 $f(X)$ 为正定二次型, 求 t 的取值范围;
3. 若 $t=1$, 求正定矩阵 B , 使得 $A = B^2$.

六、(20分) 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times m$ 矩阵, 且 $ABA = A$, 证明:

1. 秩(AB) = 秩(A);
2. 非线性方程组 $AX = \beta$ 有解的充分必要条件是 $AB\beta = \beta$;
3. 若以 E_r 表示 r 阶单位矩阵, 则 AB 与形如 $\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的分块矩阵相似, 且 r 是 A 的秩.

七、(20分) 设 A, B 是两个 n 阶矩阵, 且 $AB = A - B$, 证明:

1. B 可逆的充分必要条件是 A 可逆;
2. α 为 B 的特征向量的充分必要条件是 α 为 A 的特征向量;
3. 若 A 是正定矩阵, 则 B 也是正定矩阵.

八、(20分) 设 Γ 是 n 维欧氏空间 V 的线性变换, Γ 满足条件: 对任意 $\alpha, \beta \in V$, 有

$$(\Gamma(\alpha), \beta) = -(\alpha, \Gamma(\beta)),$$

这里 (\cdot, \cdot) 表示欧氏空间上的内积, 证明:

1. 若 Γ 有特征值, 则其特征值必为 0;
2. 若 Γ 没有特征值, 则 Γ 必可逆;
3. Γ^2 必有 n 个实特征值, 其特征值均小于或等于 0;
4. 若 n 为奇数, 则 Γ 不可逆.